ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi**:** 7/6/2016)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0001-0111-0101-2016-0705-1657

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	D	A	C	B	C	A	D	B	D

Mã đề: 0010-0111-0101-2016-0705-1657

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	A	D	D	B	D	A	C	B	C

Mã đề: 0011-0111-0101-2016-0705-1657

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	C	C	B	D	A	C	B	D	A	D

Mã đề: 0100-0111-0101-2016-0705-1657

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	D	B	A	D	C	B	C	B	D	A

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	**Nội dung**	*Điểm*
Câu 11		**1 điểm**
	Khai triển Laurent Ta có: $e^{\frac{1}{z-i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n}$ $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}=(z-i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^{n-3}}$	0,25đ

$$= \underbrace{(z-i)^3+(z-i)^2+\frac{z-i}{2}+\frac{1}{3!}}_{\text{Phần đều}} + \underbrace{\frac{1}{4!(z-i)}+\frac{1}{5!(z-i)^2}+\dots}_{\text{Phần chính}}$$ 0,25đ

Vì phần chính có vô số số hạng nên $z=i$ là điểm bất thường cốt yếu.

Tính tích phân: Vì hàm số $f(z)=(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}$ giải tích trên $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ và đường tròn $|z+2i|=6$ bao quanh điểm bất thường cô lập $z=i$ nên áp dụng thặng dư ta được 0,25đ

0,25đ

$$I=\oint\limits_{|z+2i|=6}(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}dz=2\pi i\operatorname{Res}[(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}},i]=2\pi i\frac{1}{4!}=\frac{\pi i}{12}$$

Câu 12 **2đ**

Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại

$$y(t)= 7+e^{-2t}-10y(t)*\cos 3t$$

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được

$$Y=\frac{7}{p}+\frac{1}{p+2}-10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t]$$

$$\Leftrightarrow\ Y = Y = \frac{7}{p}+\frac{1}{p+2}-10Y\frac{p}{p^2+9}$$ **0.5đ**

Giải phương trình với Y là ẩn ta được **0.5đ**

$$Y=\frac{(8p+14)(p^2+9)}{p(p+1)(p+2)(p+9)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+2}+\frac{D}{p+9}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm

$$y(t)\ =\ \mathscr{L}^{-1}[Y]=\mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p}+B\frac{1}{p+1}+C\frac{1}{p+2}+D\frac{1}{p+9}]$$

$$\Leftrightarrow\ y(t)=A+Be^{-t}+Ce^{-2t}+De^{-9t}$$ **0.75đ**

$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(A+Be^{-t}+Ce^{-2t}+De^{-9t})=A=7$ (tính A bên dưới) nên sau khoảng thời gian t đủ lớn $y(t)\approx 7$.

Tìm A,B,C,D dựa vào đẳng thức (*) **0.25đ**

$$\frac{(8p+14)(p^2+9)}{p(p+1)(p+2)(p+9)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+2}+\frac{D}{p+9}$$

$A=7$, $B=-\frac{15}{2}$, $C=-\frac{13}{7}$, $D=\frac{145}{14}$

Vậy nghiệm phương trình tích phân là $y(t)=7-\frac{15}{2}e^{-t}-\frac{13}{7}e^{-2t}+\frac{145}{14}e^{-9t}$

Câu 13		1,5đ
	Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được: $p^2Y - py(0) - y'(0) + 5(pY - y(0)) + 4Y = \mathscr{L}[1+\sin 2t]$ $\Leftrightarrow Y(p^2+5p+4) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2+4} + 1$ $\Leftrightarrow Y = \frac{p^3+p^2+6p+4}{p(p+1)(p+4)(p^2+4)}$	0.5đ 0.5đ
	Phân tích thành phân thức đơn giản $Y = \frac{p^3+p^2+6p+4}{p(p+1)(p+4)(p^2+4)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+4} + \frac{Dp+2E}{p^2+4}$ Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+1} + C\frac{1}{p+4} + D\frac{p}{p^2+4} + E\frac{2}{p^2+4}]$ $\Leftrightarrow y(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-4t} + D\cos 2t + E\sin 2t$ Tìm A, B, C, D dựa vào đẳng thức: $\frac{p^3+p^2+6p+4}{p(p+1)(p+4)(p^2+4)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+4} + \frac{Dp+2E}{p^2+4}$ $A = \frac{0^3+0^2+6\times 0+4}{(0+1)(0+4)(0^2+4)} = \frac{1}{4},\quad B = \frac{(-1)^3+(-1)^2+6\times(-1)+4}{(-1)(-1+4)((-1)^2+4)} = \frac{2}{15}$ $C = \frac{(-4)^3+(-4)^2+6\times(-4)+4}{(-4)(-4+1)((-4)^2+4)} = \frac{-17}{60}$ Từ đẳng thức (*) $\begin{cases} Cho \quad p=1: & \frac{3}{20} = \frac{A}{1} + \frac{B}{1+1} + \frac{C}{1+5} + \frac{D+2E}{1^2+4} \\ Cho \quad p=-2: & \frac{-3}{8} = \frac{A}{-2} + \frac{B}{-2+1} + \frac{C}{-2+4} + \frac{-2D+2E}{(-2)^2+4} \end{cases}$ Thay $A = \frac{1}{4}, B = \frac{2}{15}, C = \frac{-17}{60}$ vào hệ trên rồi giải tìm D, E ta được $D = \frac{-1}{10}, E = 0$ Vậy nghiệm phương trình vi phân là $y(t) = \frac{1}{4} + \frac{2}{15}e^{-t} - \frac{17}{60}e^{-4t} - \frac{1}{10}\cos 2t + 0\times\sin 2t$	0.5đ

	b) Vì $\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{2}{15}e^{-t}-\frac{17}{60}e^{-4t})=0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\cos 2t$. Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian t có biên độ dao động $\frac{1}{10}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_o=\frac{1}{4}$. …………………………………………………………………………… Cách giải tổng quát như sau: $y(t)= A+Be^{-t}+Ce^{-4t}+D\cos 2t+E\sin 2t$ **Vì** $\lim\limits_{t\to+\infty}(Be^{-t}+Ce^{-4t})=0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân $y(t)\approx A+D\cos 2t+E\sin 2t = A+\sqrt{D^2+E^2}(\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}\cos 2t+\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}\sin 2t)$ Đặt $\sin\alpha=\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}},\cos\alpha=\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}$ $y(t)\approx A+\sqrt{D^2+E^2}(\sin\alpha\cos 2t+\cos\alpha\sin 2t)=A+\sqrt{D^2+E^2}\sin(2t+\alpha)$ Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian t có biên độ dao động $\sqrt{D^2+E^2}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_o=A$.	***0.5đ***

*** HẾT***